**第四讲数列求和、数列的综合应用**

id:2147491706;FounderCES

题组1等差、等比数列的综合应用

1*.*[2014新课标全国Ⅱ,5,5分]等差数列{*an*}的公差为2,若*a*2,*a*4,*a*8成等比数列,则{*an*}的前*n*项和*Sn=*()

A*.n*(*n+*1) B*.n*(*n-*1)

C*.* D*.*

2*.*[2017北京,10,5分][理]若等差数列{*an*}和等比数列{*bn*}满足*a*1*=b*1*=-*1,*a*4*=b*4*=*8,则*=　　　　.*

3*.*[2015湖南,14,5分][理]设*Sn*为等比数列{*an*}的前*n*项和*.*若*a*1*=*1,且3*S*1,2*S*2,*S*3成等差数列,则*an=　　　.*

4*.*[2014安徽,12,5分][理]数列{*an*}是等差数列,若*a*1*+*1,*a*3*+*3,*a*5*+*5构成公比为*q*的等比数列,则*q=　　　　.*

5*.*[2014天津,11,5分][理]设{*an*}是首项为*a*1,公差为*-*1的等差数列,*Sn*为其前*n*项和*.*若*S*1,*S*2,*S*4成等比数列,则*a*1的值为*.*

6*.*[2016北京,15,13分]已知{*an*}是等差数列,{*bn*}是等比数列,且*b*2*=*3,*b*3*=*9,*a*1*=b*1,*a*14*=b*4*.*

(Ⅰ)求{*an*}的通项公式;

(Ⅱ)设*cn=an+bn*,求数列{*cn*}的前*n*项和*.*

7*.*[2016天津,18,13分][理]已知{*an*}是各项均为正数的等差数列,公差为*d.*对任意的*n*∈N*\**,*bn*是*an*和*an+*1的等比中项*.*

(Ⅰ)设*cn=-*,*n*∈N*\**,求证:数列{*cn*}是等差数列;

(Ⅱ)设*a*1*=d*,*Tn=*(*-*1)*k*,*n*∈N*\**,求证:*<.*

题组2数列的实际应用

8*.*[2017全国卷Ⅰ,12,5分][理]几位大学生响应国家的创业号召,开发了一款应用软件*.*为激发大家学习数学的兴趣,他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动*.*这款软件的激活码为下面数学问题的答案:已知数列1,1,2,1,2,4,1,2,4,8,1,2,4,8,16,…,其中第一项是20,接下来的两项是20,21,再接下来的三项是20,21,22,依此类推*.*求满足如下条件的最小整数*N*:*N>*100且该数列的前*N*项和为2的整数幂*.*那么该款软件的激活码是()

A.440 B.330 C.220 D.110

题组3数列与其他知识的综合

9*.*[2016浙江,8,5分]如图6*-*4*-*1,点列{*An*},{*Bn*}分别在某锐角的两边上,且*|AnAn+*1*|=|An+*1*An+*2*|*,*An*≠*An+*2,*n*∈N*\**,*|BnBn+*1*|=|Bn+*1*Bn+*2*|*,*Bn*≠*Bn+*2,*n*∈N*\**(*P*≠*Q*表示点*P*与*Q*不重合)*.*若*dn=|AnBn|*,*Sn*为△*AnBnBn+*1的面积,则()

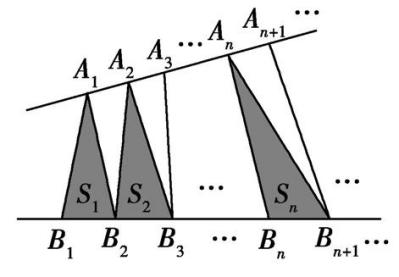


图6*-*4*-*1

A.{*Sn*}是等差数列 B.{}是等差数列 C.{*dn*}是等差数列 D.{}是等差数列

10*.*[2015福建,8,5分][理]若*a*,*b*是函数*f*(*x*)*=x*2*-px+q*(*p>*0,*q>*0)的两个不同的零点,且*a*,*b*,*-*2这三个数可适当排序后成等差数列,也可适当排序后成等比数列,则*p+q*的值等于()

A.6 B.7 C.8 D.9

11*.*[2016四川,19,12分][理]已知数列{*an*}的首项为1,*Sn*为数列{*an*}的前*n*项和,*Sn+*1*=qSn+*1,其中*q>*0,*n*∈N\**.*

(Ⅰ)若2*a*2,*a*3,*a*2*+*2成等差数列,求数列{*an*}的通项公式;

(Ⅱ)设双曲线*x*2*-=*1的离心率为*en*,且*e*2*=*,证明:*e*1*+e*2*+*…*+en>.*

12*.*[2015安徽,18,12分][理]设*n*∈N*\**,*xn*是曲线*y=x*2*n+*2*+*1在点(1,2)处的切线与*x*轴交点的横坐标*.*

(*Ⅰ*)求数列{*xn*}的通项公式;

(*Ⅱ*)记*Tn=*…,证明:*Tn*≥*.*

id:2147491741;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018武汉市部分学校调研,3]已知等比数列{*an*}中,3*a*2,2*a*3,*a*4成等差数列,设*Sn*为数列{*an*}的前*n*项和,则等于()

A. B.3或 C.3 D.

2*.*[2017东北三省四市一模,5]已知数列{*an*}为等差数列,数列{*bn*}为等比数列,且满足*a*2 016*+a*2 017*=*π,*b*20*b*21*=*4,则tan *=*()

A. B. C.1 D.-1

3*.*[2017石家庄市一模,8]已知函数*f*(*x*)在(*-*1,*+∞*)上单调,且函数*y=f*(*x-*2)的图象关于直线*x=*1对称,若数列{*an*}是公差不为0的等差数列,且*f*(*a*50)*=f*(*a*51),则数列{*an*}的前100项的和为()

A.*-*200 B.*-*100 C.0 D.*-*50

4*.*[2018长春市高三第一次质量监测,17]已知数列{*an*}的前*n*项和*Sn=*2*n+*1*+n-*2*.*

(1)求数列{*an*}的通项公式;

(2)设*bn=*log2(*an-*1),求证:*+++*…*+<*1*.*

5*.*[2017南昌市三模,17]已知数列{*an*}满足*+++*…*+=n*2*+n.*

(1)求数列{*an*}的通项公式;

(2)若*bn=*,求数列{*bn*}的前*n*项和*Sn.*

**B组提升题**

6*.*[2018洛阳市尖子生高三第一次联考,16]已知数列{*an*}满足*nan+*2*-*(*n+*2)*an=λ*(*n*2*+*2*n*),其中*a*1*=*1,*a*2*=*2,若*an<an+*1对任意的*n*∈N*\**恒成立,则实数*λ*的取值范围是*.*

7*.*[2017宁夏银川市高中教学质量检测,16]我们把满足*xn+*1*=xn-*的数列{*xn*}叫作牛顿数列*.*已知函数*f*(*x*)*=x*2*-*1,数列{*xn*}为牛顿数列,设*an=*ln ,已知*a*1*=*2,则*a*3*=　　　　.*

8*.*[2017陕西省六校第三次适应性训练,16]已知数列{*an*}满足*a*1*=*,*an+*1*-*1*=an*(*an-*1)(*n*∈N*\**),且*Sn=++*…*+*,则*Sn*的整数部分的所有可能值构成的集合的真子集个数为*.*

9*.*[2017长沙市五月模拟,17]设数列{*an*}的前*n*项和是*Sn*,若点*An*(*n*,)在函数*f*(*x*)*=-x+c*的图象上运动,其中*c*是与*x*无关的常数,且*a*1*=*3*.*

(1)求数列{*an*}的通项公式;

(2)记*bn=*,求数列{*bn*}的前*n*项和*Tn*的最小值*.*

10*.*[2017桂林、百色、梧州、崇左、北海五市联考,17]已知各项均为正数的等差数列{*an*}满足*a*4*=*2*a*2,且*a*1,4,*a*4成等比数列,设{*an*}的前*n*项和为*Sn.*

(1)求数列{*an*}的通项公式;

(2)设数列{}的前*n*项和为*Tn*,求证:*Tn<*3*.*

**答案**

id:2147497657;FounderCES

1*.*A因为*a*2,*a*4,*a*8成等比数列,所以*=a*2·*a*8,所以(*a*1*+*6)2*=*(*a*1*+*2)·(*a*1*+*14),解得*a*1*=*2*.*所以*Sn=na*1*+d=n*(*n+*1)*.*故选A*.*

2*.*1设等差数列{*an*}的公差为*d*,等比数列{*bn*}的公比为*q*,则*a*4*=-*1*+*3*d=*8,解得*d=*3;*b*4*=-*1·*q*3*=*8,解得*q=-*2*.*所以*a*2*=-*1*+*3*=*2,*b*2*=-*1*×*(*-*2)*=*2,所以*=*1*.*

3*.*3*n-*1 由3*S*1,2*S*2,*S*3成等差数列,得4*S*2*=*3*S*1*+S*3,即3*S*2*-*3*S*1*=S*3*-S*2,则3*a*2*=a*3,得公比*q=*3,所以*an=a*1*qn-*1*=*3*n-*1*.*

4*.*1解法一因为数列{*an*}是等差数列,所以*a*1*+*1,*a*3*+*3,*a*5*+*5也成等差数列,又*a*1*+*1,*a*3*+*3,*a*5*+*5构成公比为*q*的等比数列,所以*a*1*+*1,*a*3*+*3,*a*5*+*5是常数列,故*q=*1*.*

解法二因为数列{*an*}是等差数列,所以可设*a*1*=t-d*,*a*3*=t*,*a*5*=t+d*,故由已知得(*t+*3)2*=*(*t-d+*1)(*t+d+*5),化简得*d*2*+*4*d+*4*=*0,解得*d=-*2,所以*a*3*+*3*=a*1*+*1,即*q=*1*.*

5*.-*由已知得*S*1·*S*4*=*,即*a*1·(4*a*1*-*6)*=*(2*a*1*-*1)2,解得*a*1*=-.*

6*.*(Ⅰ)等比数列{*bn*}的公比*q===*3,

所以*b*1*==*1,*b*4*=b*3*q=*27*.*

设等差数列{*an*}的公差为*d.*

因为*a*1*=b*1*=*1,*a*14*=b*4*=*27,所以1*+*13*d=*27,即*d=*2*.*

所以*an=*2*n-*1(*n=*1,2,3,…)*.*

(Ⅱ)由(*Ⅰ*)知,*an=*2*n-*1,*bn=*3*n-*1,

因此*cn=an+bn=*2*n-*1*+*3*n-*1*.*

从而数列{*cn*}的前*n*项和

*Sn=*1*+*3*+*…*+*(2*n-*1)*+*1*+*3*+*…*+*3*n-*1

*=+*

*=n*2*+.*

7*.*(Ⅰ)由题意得*=anan+*1,有*cn=-=an+*1*an+*2*-anan+*1*=*2*dan+*1,因此*cn+*1*-cn=*2*d*(*an+*2*-an+*1)*=*2*d*2,所以数列{*cn*}是等差数列*.*

(Ⅱ)*Tn=*(*-+*)*+*(*-+*)*+*…*+*(*-+*)

*=*2*d*(*a*2*+a*4*+*…*+a*2*n*)

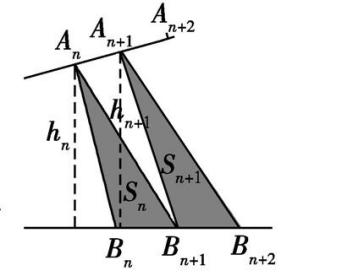
*=*2*d*·

*=*2*d*2*n*(*n+*1)*.*

所以*=**=**=*·(1*-*)*<.*

8*.*A设第一项为第1组,接下来的两项为第2组,再接下来的三项为第3组,依此类推,则第*n*组的项数为*n*,前*n*组的项数和为*.*由题意可知,*N>*100,令*>*100,∴*n*≥14,*n*∈N*\**,即*N*出现在第13组之后*.*易得第*n* 组的所有项的和为*=*2*n-*1,前*n*组的所有项的和为*-n=*2*n+*1*-n-*2*.*设满足条件的*N*在第*k+*1(*k*∈N*\**,*k*≥13)组,且第*N*项为第*k+*1组的第*t*(*t*∈N*\**)个数,第*k+*1组的前*t*项的和 2*t-*1应与*-k-*2互为相反数,即2*t-*1*=k+*2,∴2*t=k+*3,∴*t=*log2(*k+*3),∴当*t=*4,*k=*13时,*N=+*4*=*95*<*100,不满足题意,当*t=*5,*k=*29时,*N=+*5*=*440,当*t>*5时,*N>*440,故选A*.*

9*.*A如图D 6*-*4*-*1,



图D 6*-*4*-*1

记*hn*为△*AnBnBn+*1的边*BnBn+*1上的高(*n*∈N*\**),设锐角的大小为*θ*,根据图象可知,*hn+*1*=hn+|AnAn+*1*|*sin *θ*,又*|BnBn+*1*|=|Bn+*1*Bn+*2*|*,∴*Sn+*1*-Sn=|Bn+*1*Bn+*2*|*·*hn+*1*-|BnBn+*1*|*·*hn=|BnBn+*1*|*·(*hn+*1*-hn*)*=|BnBn+*1*|*·*|AnAn+*1*|*sin *θ.*根据题意知,*|BnBn+*1*|=|Bn+*1*Bn+*2*|*,*|AnAn+*1*|=|An+*1*An+*2*|*,∴*|BnBn+*1*|*·*|AnAn+*1*|*sin *θ*为常数,∴{*Sn*}为等差数列,故选A*.*

10*.*D因为*a*,*b*为函数*f*(*x*)*=x*2*-px+q*(*p>*0,*q>*0)的两个不同的零点,所以所以*a>*0,*b>*0,所以当*-*2在中间时,*a*,*b*,*-*2这三个数不可能成等差数列,且只有当*-*2在中间时,*a*,*b*,*-*2这三个数才能成等比数列*.*经分析知,*a*,*b*,*-*2或*b*,*a*,*-*2或*-*2,*a*,*b*或*-*2,*b*,*a*成等差数列,*a*,*-*2,*b*或*b*,*-*2,*a*成等比数列*.*不妨取数列*a*,*b*,*-*2成等差数列,数列*a*,*-*2,*b*成等比数列,则有解得或(舍去),所以所以*p+q=*9*.*故选D*.*

11*.*(Ⅰ)由已知,*Sn+*1*=qSn+*1,*Sn+*2*=qSn+*1*+*1,两式相减得到*an+*2*=qan+*1,*n*≥1*.*

又由*S*2*=qS*1*+*1得到*a*2*=qa*1,

故*an+*1*=qan*对所有*n*≥1都成立*.*

所以,数列{*an*}是首项为1,公比为*q*的等比数列*.*从而*an=qn-*1*.*

由2*a*2,*a*3,*a*2*+*2成等差数列,可得2*a*3*=*3*a*2*+*2,得2*q*2*=*3*q+*2,则(2*q+*1)(*q-*2)*=*0,由已知,*q>*0,故*q=*2*.*

所以*an=*2*n-*1(*n*∈N*\**)*.*

(Ⅱ)由(*Ⅰ*)可知,*an=qn-*1*.*

所以双曲线*x*2*-=*1的离心率*en==.*

由*e*2*==*得*q=.*

因为1*+q*2(*k-*1)*>q*2(*k-*1),所以*>qk-*1(*k*∈N\*)*.*

于是*e*1*+e*2*+*…*+en>*1*+q+*…*+qn-*1*=*,

故*e*1*+e*2*+*…*+en>.*

12*.*(Ⅰ)*y'=*(*x*2*n+*2*+*1)*'=*(2*n+*2)*x*2*n+*1,曲线*y=x*2*n+*2*+*1在点(1,2)处的切线斜率为2*n+*2,

从而切线方程为*y-*2*=*(2*n+*2)(*x-*1)*.*

令*y=*0,解得切线与*x*轴交点的横坐标*xn=*1*-=.*

(Ⅱ)由题设和(Ⅰ)中的计算结果知

*Tn=*…*=*()2()2…()2*.*

当*n=*1时,*T*1*=.*

当*n*≥2时,因为*=*()2*=>==*,

所以*Tn>*()2*×××*…*×=.*

综上可得对任意的*n*∈N\*,均有*Tn*≥*.*

id:2147497671;FounderCES

**A组基础题**

1*.*B设等比数列{*an*}的公比为*q*,由3*a*2,2*a*3,*a*4成等差数列,得3*a*2*+a*4*=*4*a*3⇒3*a*2*+a*2*q*2*=*4*a*2*q*⇒*a*2(*q*2*-*4*q+*3)*=*0⇒*a*2*=*0(舍去)或*q*2*-*4*q+*3*=*0,∴*q=*3或*q=*1*.*

当*q=*3时,*S*3*=*,*====*; 当*q=*1时,数列{*an*}是常数列,*a*1*=a*2*=a*3,此时*==*3*.*综上,故选B*.*

2*.*A 依题意得*a*1*+a*4 032*=a*2 016*+a*2 017*=*π,*b*19*b*22*=b*20*b*21*=*4,所以tan*=*tan*=*,选A*.*

3*.*B因为函数*y=f*(*x-*2)的图象关于直线*x=*1对称,则函数*f*(*x*)的图象关于直线*x=-*1对称*.*又函数*f*(*x*)在(*-*1,*+∞*)上单调,数列{*an*}是公差不为0的等差数列,且*f*(*a*50)*=f*(*a*51),所以*a*50*+a*51*=-*2,所以*S*100*==*50(*a*50*+a*51)*=-*100,故选B*.*

4*.*(1)由得*an=Sn-Sn-*1*=*2*n+*1(*n*≥2)*.*

当*n=*1时,*a*1*=S*1*=*3,也适合*an=*2*n+*1*.*综上,*an=*2*n+*1*.*

(2)由(1)知,*bn=*log2(*an-*1)*=*log22*n=n.*

所*+++*…*+=+++*…*+=*(1*-*)*+*(*-*)*+*(*-*)*+*…*+*(*-*)*=*1*-<*1*.*

5*.*(1)*+++*…*+=n*2*+n　①*,

∴当*n*≥2时,*+++*…*+=*(*n-*1)2*+n-*1*②*,

*①-②*得,*=*2*n*(*n*≥2),∴*an=n*·2*n+*1(*n*≥2)*.*

又当*n=*1时,*=*1*+*1,*a*1*=*4也适合*an=n*·2*n+*1,∴*an=n*·2*n+*1*.*

(2)由(1)得,*bn==n*(*-*2)*n*,

∴*Sn=*1*×*(*-*2)1*+*2*×*(*-*2)2*+*3*×*(*-*2)3*+*…*+n×*(*-*2)*n　③*,

*-*2*Sn=*1*×*(*-*2)2*+*2*×*(*-*2)3*+*3*×*(*-*2)4*+*…*+*(*n-*1)*×*(*-*2)*n+n×*(*-*2)*n+*1*④*,

*③-④*得,3*Sn=*(*-*2)*+*(*-*2)2*+*(*-*2)3*+*…*+*(*-*2)*n-n×*(*-*2)*n+*1*=-n×*(*-*2)*n+*1,

∴*Sn=-.*

**B组提升题**

6*.*[0,*+∞*)由*nan+*2*-*(*n+*2)*an=λ*(*n*2*+*2*n*)*=λn*(*n+*2)得*-=λ*,所以数列{}的奇数项与偶数项均是以*λ*为公差的等差数列,因为*a*1*=*1,*a*2*=*2,所以当*n*为奇数时,*=*1*+λ*(*-*1)*=λ+*1,所以*an=λ+n*;当*n*为偶数时,*=*1*+λ*(*-*1)*=λ+*1,所以*an=λ+n.*当*n*为奇数时,由*an<an+*1得*λ+n<λ+n+*1,即*λ*(*n-*1)*>-*2,若*n=*1,则*λ*∈R,若*n>*1,则*λ>-*,所以*λ*≥0;当*n*为偶数时,由*an<an+*1得*λ+n<λ+n+*1,即3*λn>-*2,所以*λ>-*,即*λ*≥0*.*综上,实数*λ*的取值范围为[0,*+∞*)*.*

7*.*8由*f*(*x*)*=x*2*-*1,得*f* *'*(*x*)*=*2*x*,则*xn+*1*=xn-=*,所以*xn+*1*-*1*=*,*xn+*1*+*1*=*,所以*=*,所以ln*=*ln*=*2ln,即*an+*1*=*2*an*,所以数列{*an*}是首项为2、公比为2的等比数列,则*a*3*=*2*×*22*=*8*.*

8*.*7因为数列{*an*}满足*a*1*=*,*an+*1*-*1*=an*(*an-*1)(*n*∈N*\**),所以*an+*1*-an=>*0,*an+*1*>an*,因此数列{*an*}单调递增*.*由*a*1*=*,*an+*1*-*1*=an*(*an-*1),得*a*2*-*1*=×*(*-*1),*a*2*=*,同理*a*3*=*,*a*4*=*,*=>*1,*=<*1,所以当*n*≥4时,0*<<*1*.*另一方面由*an+*1*-*1*=an*(*an-*1),得*=-*,所以*Sn=++*…*+=*(*-*)*+*(*-*)*+*…*+*(*-*)*=*3*-.*所以当*n=*1时,*S*1*==*,其整数部分为0;当*n=*2时,*S*2*=+=*1*+*,其整数部分为1;当*n*≥3时,*Sn=*3*-*∈(2,3),其整数部分为2*.*综上,*Sn*的整数部分的所有可能值构成的集合为{0,1,2},其真子集的个数为23*-*1*=*7*.*

9*.*(1)因为点*An*(*n*,)在函数*f*(*x*)*=-x+c*的图象上运动,

所以*=-n+c*,所以*Sn=-n*2*+cn.*

因为*a*1*=*3,所以*c=*4,所以*Sn=-n*2*+*4*n*,

所以*an=Sn-Sn-*1*=-*2*n+*5(*n*≥2)*.*

又*a*1*=*3满足*an=-*2*n+*5,所以数列{*an*}的通项公式*an=-*2*n+*5(*n*≥1)*.*

(2)由(1)知,*bn==-*2*an+*5*=-*2(*-*2*n+*5)*+*5*=*4*n-*5,

所以数列{*bn*}为等差数列,所以*Tn==*2*n*2*-*3*n.*

则当*n=*1时,*Tn*取最小值,最小值为*T*1*=-*1,

所以数列{*bn*}的前*n*项和*Tn*的最小值为*-*1*.*

10*.*(1)根据题意,设等差数列{*an*}的公差为*d*,

∵*a*4*=*2*a*2,且*a*1,4,*a*4成等比数列,*a*1*>*0,

∴解得*a*1*=*2,*d=*2,

∴数列{*an*}的通项公式为*an=a*1*+*(*n-*1)*d=*2*+*2(*n-*1)*=*2*n.*

(2)由(1)知*a*1*=d=*2,则*Sn=*2*n+×*2*=n*2*+n*,

设*bn=*,则*bn==.*

∴*Tn=++*…*++　①*,

*Tn=++*…*++　②*,

*①-②*得,*Tn=+++*…*+-*,

∴*Tn=*2*+++*…*+-=*2*+-=*3*--<*3*.*

∴*Tn<*3*.*